ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
ES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

Concours d'admission 1988

MATHÉMATIQUES

Première épreuve

OPTIONS M, P', T.A.

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLÈME

On désigne par $C^\infty(\mathbf{R})$ (resp. par $C^\infty(\mathbf{R}_+^*)$) le C-espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbf{R}$ dans C (resp. de $]\,0, +\infty\,[$ dans C) qui sont indéfiniment dérivables. Le C-espace vectoriel des fonctions complexes de deux variables réelles (x, y) définies et pourvues de dérivées partielles continues à tous les ordres dans l'ouvert $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x > 0,\ y > 0\}$ est noté $C^\infty(D)$. Si f est un élément de $C^\infty(D)$, les parties réelle et imaginaire de f sont des fonctions de $C^\infty(D)$ à valeurs réelles telles que $f = g + ih$ et, par exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial x}.$$

Dans le cours du problème, on utilise les deux fonctions suivantes, éléments de $C^\infty(D)$:

$$t : \quad (x, y) \mapsto \frac{y}{x}$$

$$r : \quad (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

On admettra que si f est élément de $C^\infty(D)$, il existe une fonction unique notée $\tilde{f}$, élément de $C^\infty(D)$, telle que pour tout couple (x, y) de D

$$f(x, y) = \tilde{f}\left((x^2 + y^2)^{1/2}, \frac{y}{x}\right).$$

(Le second membre pouvant être encore noté $\tilde{f}\ (r, t)$.)

Le produit habituel de deux fonctions f et g est noté fg. Si f est à valeurs réelles (resp. à valeurs réelles strictement positives) indéfiniment dérivable dans D et si φ est un élément de $C^\infty(\mathbf{R})$ (respectivement si φ est un élément de $C^\infty(\mathbf{R}_+^*)$), $\varphi \circ f$ ou $\varphi\,(f)$ désigne la fonction composée, élément de $C^\infty(D)$ qui associe à (x, y) de D le nombre $\varphi\,(f(x, y))$.

La fonction f de $C^\infty(D)$ étant donnée, on lui associe $T\,(f)$, noté aussi Tf, élément de $C^\infty(D)$, défini pour tout (x, y) de D par :

$$Tf(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

L'application T ainsi définie de $C^\infty(D)$ dans $C^\infty(D)$ est un endomorphisme. Pour tout complexe α on définit le noyau N_α de l'endomorphisme $T - \alpha I$ où I est l'application identique de $C^\infty(D)$:

$$N_\alpha = \{f \in C^\infty(D) \quad ; \quad Tf - \alpha f = 0\}.$$

L'objectif du problème est l'étude des divers noyaux N_α et de noyaux de polynômes de T, ce qui conduit à la résolution de certaines équations aux dérivées partielles dans le domaine D.

PARTIE I

1° *a)* f et g étant deux éléments de $C^\infty(D)$, exprimer $T(fg)$ en fonction de f, g, Tf et Tg.

b) Soit f un élément de $C^\infty(D)$ auquel on associe, comme il est dit dans le préambule, $\tilde{f}$ telle que $f(x, y) = \tilde{f}(r, t)$. Exprimer Tf à l'aide notamment des dérivées partielles de $\tilde{f}$ notées :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}.$$

c) Soit f, à valeurs réelles, élément de $C^\infty(D)$, calculer $T(\varphi o f)$ où φ est un élément de $C^\infty(\mathbb{R})$.

2° *Etude de N_0.*

a) Calculer Tt.

b) Montrer que si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, alors $\varphi o t \in N_0$.

c) Déduire des questions précédentes une expression générale des fonctions de N_0.

3° *Étude de N_1.*

a) Calculer Tr.

b) Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, exprimer $T(\varphi o r)$ et en déduire $T(r^k)$ où l'exposant k est arbitraire dans $\mathbb{Z}$.

c) Montrer l'équivalence :

$$f \in N_1 \Leftrightarrow r^{-1} f \in N_0.$$

En déduire une expression générale des fonctions de N_1.

4° *Étude de N_α.*

a) Déterminer, de manière analogue à ce qui précède, une expression générale des fonctions de N_k où k est arbitraire dans $\mathbb{Z}$.

b) Lorsque α est un complexe, on pose $r^\alpha = e^{\alpha \ln r}$. Calculer $T(r^\alpha)$ et en déduire une expression générale des éléments de N_α.

PARTIE II

Dans cette partie, on suppose donnés deux nombres complexes α et β, une fonction g non nulle élément de N_β et une fonction φ_0 élément de $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. On se propose de résoudre l'équation d'inconnue f, élément de $C^\infty(D)$:

$$Tf - \alpha f = g\,\varphi_0(r)$$

1° On suppose d'abord $\varphi_0 = 1$, l'équation devenant alors :

$$Tf - \alpha f = g \tag{1}$$

a) On suppose en outre $\alpha \neq \beta$. Montrer que l'équation (1) admet une solution particulière f_0 proportionnelle à g. En déduire l'expression générale des solutions de (1).

b) On suppose maintenant $\alpha = \beta$. Montrer qu'il existe une solution particulière de l'équation (1) qui est de la forme $f_0 = \varphi(r)\,g$ où φ est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ que l'on explicitera. En déduire la forme de la solution générale de (1).

2° Résoudre les équations suivantes où f, élément de $C^\infty(D)$ est l'inconnue :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^2 + xy} \qquad \forall (x, y) \in D$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 2f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(x - y)}{x + y} \qquad \forall (x, y) \in D$$

Tournez la page S. V. P.

3° Dans cette question, g est un élément de N_β et φ_0 est une fonction, élément de $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. On se propose de résoudre avec ces données l'équation :

(2) $$Tf - \alpha f = g\,\varphi_0(r).$$

a) Montrer qu'il existe une solution particulière de l'équation (2) qui est de la forme $f_0 = \varphi(r)\,g$ où la fonction φ est un élément de $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ s'exprimant à l'aide de la fonction φ_0. En déduire l'expression générale des solutions de l'équation (2), expression dans laquelle figure une intégrale.

b) Trouver, en particulier, les solutions de l'équation :

$$Tf - \alpha f = g \ln r$$

où g est un élément donné de N_α (autrement dit : $\beta = \alpha$).

PARTIE III

On définit les puissances successives de l'endomorphisme T de $C^\infty(D)$ de la façon habituelle :

$$\forall f \in C^\infty(D) \quad T^2 f = T(Tf)$$
$$T^n f = T(T^{n-1} f) \qquad (n > 2)$$

1° Trouver l'expression générale des fonctions f de $C^\infty(D)$ telles que $T^2 f = 0$.

2° g étant une fonction donnée dans N_0, trouver l'expression générale des fonctions f de $C^\infty(D)$ solutions de $T^2 f = g$. (On pourra passer par l'intermédiaire de la nouvelle fonction inconnue $u = Tf$.)

3° En raisonnant par récurrence, déduire de ce qui précède l'expression générale des fonctions f constituant le noyau de l'endomorphisme T^n. (On montrera, en particulier, que cette expression fait intervenir n fonctions arbitraires.)

PARTIE IV

1° α et β sont, à nouveau, deux nombres complexes donnés non tous deux nuls. Résoudre dans $C^\infty(D)$:

$$(T - \alpha I) \circ (T - \beta I) f = 0$$

2° α, β, γ étant trois complexes donnés, résoudre l'équation :

$$(T - \alpha I) \circ (T - \beta I) f = g$$

où g est donnée dans N_γ. On discutera suivant les valeurs de α, β, γ.

3° Résoudre l'équation d'inconnue f ($f \in C^\infty(D)$) :

$$\forall (x,y) \in D, \qquad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = k f(x,y),$$

où k est un nombre complexe donné.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail